CORRECTION Exercice 6

1°) a) On a $Z = \dfrac{iz-4}{z-4} = \dfrac{(iz-4)(\overline{z}-4)}{(z-4)(\overline{z}-4)} = \dfrac{iz\overline{z} - 4iz - 4\overline{z} + 16}{z\overline{z} - 4z - 4\overline{z} + 16}$

On sait $z = x + iy$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

donc $\overline{z} = x - iy$, et $z\overline{z} = x^2 + y^2$

On a alors $Z = \dfrac{i(x^2+y^2) - 4i(x+iy) - 4(x-iy) + 16}{x^2 + y^2 - 4x - 4iy - 4x + 4iy + 16}$

Donc $Z = \dfrac{i(x^2+y^2) - 4ix + 4y - 4x + 4iy + 16}{x^2 + y^2 - 8x + 16}$

$Z = \dfrac{4y - 4x + 16 + i(x^2 + y^2 - 4x + 4y)}{x^2 + y^2 - 8x + 16}$

On sait que $Z = X + iY$ avec $X \in \mathbb{R}$ et $Y \in \mathbb{R}$

On obtient donc $X + iY = \dfrac{4y - 4x + 16}{x^2 + y^2 - 8x + 16} + i\,\dfrac{x^2 + y^2 - 4x + 4y}{x^2 + y^2 - 8x + 16}$

Deux nombres complexes sont égaux lorsqu'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Comme x, y, X et Y sont des réels, on en déduit que :

$$\boxed{X = \dfrac{4y - 4x + 16}{x^2 + y^2 - 8x + 16} \quad \text{et} \quad Y = \dfrac{x^2 + y^2 - 4x + 4y}{x^2 + y^2 - 8x + 16}}$$

> Il faut impérativement signaler que x, y, X et Y sont des nombres réels.
> C'est une condition indispensable pour pouvoir affirmer que les expressions trouvées correspondent à la partie réelle et à la partie imaginaire de Z.

1°) b) En supposant que $z \neq 4$, on peut écrire :

$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Y = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 + y^2 - 4x + 4y}{x^2 + y^2 - 8x + 16} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y+2)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 = 8$

$\boxed{\text{Une équation cartésienne de } (\mathscr{C}) \text{ est donc } (x-2)^2 + (y+2)^2 = 8}$

$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 8$ est une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(2\ ;\ -2)$ et de rayon $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

On peut vérifier que le point A qui a pour coordonnées (4 ; 0) est un point de ce cercle. On en déduit que alors :

$\boxed{(\mathscr{C}) \text{ est le cercle de centre } \Omega(2\ ;\ -2) \text{ et de rayon } 2\sqrt{2}\text{, privé du point A}}$

Voir dessin en dernière page

> La méthode qui consiste à considérer $x^2 - 4x$ comme le début d'une identité remarquable et qui permet de remplacer $x^2 - 4x$ par $(x-2)^2 - 4$, doit être connue, ainsi que l'équation cartésienne d'un cercle.

> Ne pas oublier de signaler qu'il faut exclure le point A qui, par hypothèse, ne fait pas partie de l'ensemble ($\mathscr{C}$)

Il est aussi possible de raisonner en utilisant les arguments, mais il faut alors traiter à part le cas particulier $iz-4=0$, car le nombre 0 n'a pas d'argument.

2°) a) En supposant que $z \neq 4$, on peut écrire :

$$\frac{iz-4}{z-4} \text{ est réel} \Leftrightarrow \frac{iz-4}{z-4} = k \quad ; k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{i(z+4i)}{z-4} = k \quad ; k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z+4i}{z-4} = \frac{k}{i} \quad ; k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z+4i}{z-4} = -ki \quad ; k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z+4i}{z-4} = k'i \quad ; k' \in \mathbb{R} \qquad \text{(en prenant } k' = -k\text{)}$$

On obtient donc : $\boxed{\dfrac{iz-4}{z-4} \text{ est réel} \Leftrightarrow \dfrac{z+4i}{z-4} \text{ est imaginaire pur}}$

2°) b) A a pour affixe 4 et M a pour affixe z, donc $\overrightarrow{AM}$ a pour affixe $z-4$.

B a pour affixe $-4i$ et M a pour affixe z, donc $\overrightarrow{BM}$ a pour affixe $z+4i$.

En supposant que $z \neq 4$, on peut écrire :

L'interprétation géométrique en utilisant les arguments n'est possible que pour les nombres complexes non nuls.

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z+4i}{z-4} \text{ est imaginaire pur}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z+4i}{z-4} = 0 \text{ ou } \arg\left(\frac{z+4i}{z-4}\right) = \frac{\pi}{2}\,[\pi]$$

On sait que si $\dfrac{z+4i}{z-4} \neq 0$, on a $\arg\left(\dfrac{z+4i}{z-4}\right) = (\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}) \quad [2\pi]$,

on en déduit que $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = -4i$ ou $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2}\,[\pi]$

$$\Leftrightarrow M = B \text{ ou } (\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2}\,[\pi]$$

On obtient alors $\boxed{M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \quad \text{(avec } M \neq A\text{)}}$

Ne pas oublier de signaler qu'il faut exclure le point A qui par hypothèse ne fait pas partie de l'ensemble $(\mathscr{C})$.

On sait que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ soient orthogonaux est le cercle de diamètre [AB].

On en déduit que $\boxed{(\mathscr{C}) \text{ est le cercle de diamètre [AB] privé de A}}$

Fiches de cours	Complexes	Géométrie	

Le point O étant manifestement sur le cercle, il est bon de le signaler.

L'unité n'est pas donnée par le texte de l'exercice, il faut alors la choisir de telle sorte que le dessin soit entièrement sur la feuille et suffisamment grand pour être lisible.

tuniTests.tn

نجاحك يهمنا

Figure

On peut remarquer que le cercle de diamètre [AB] passe par O.
En effet lorsque $z = 0$, on a $Z = 1$, donc $Z \in \mathbb{R}$.